



# CONTRIBUCIÓN DEL MÉTODO DE LA VIGA AL CÁLCULO ESTRUCTURAL DE LAS CÁSCARAS CILÍNDRICAS LARGAS DE CUBIERTA

**Mónica MARTÍNEZ MARTÍNEZ**

Doctora arquitecta. Escuela de Arquitectura de la Universidad de Alcalá.

[monica.martinezm@uah.es](mailto:monica.martinezm@uah.es)

## ABSTRACT

*The first long cylindrical shell of reinforced concrete was built in Germany in 1924, to house a factory building belonging to the Zeiss company.*

*The structural calculation of these buildings emerged at a time characterized by a high appreciation of mathematics. This attitude exerted a strong influence on the methods that emerged for the structural calculation of the roof long cylindrical shells in reinforced concrete and based on the Theory of Elasticity.*

*From this moment, these structural typologies were seen as buildings that could span wide areas with minimum material costs. However, the main problem was the enormous complexity entailed in mathematical calculations based on the Theory of Elasticity, employees for structural calculation.*

*After 1940, the structural calculation of cylindrical thin concrete shells developed rapidly as a result of discrepancies between the mathematical results obtained based on the theory of elasticity and those obtained from assays on real structures.*

*In this context, studies conducted by Danish engineers KW Johansen, in 1944, and H. Lundgren, in 1949, will mark the origin of the application of the method, called the beam method, to the structural calculation of the roof long cylindrical shells in reinforced concrete. With this method it was possible to calculate, in a simple and safe way, these structural typologies as it will try to demonstrate in the communication.*

## RESUMEN

*La primera cáscara cilíndrica larga de hormigón armado aparece en Alemania en 1924, para cubrir un edificio perteneciente a la fábrica de la compañía Zeiss.*

*El origen del cálculo estructural de estas tipologías estructurales coincidió con un momento caracterizado por un elevado aprecio por las matemáticas. Este hecho repercutió enormemente en los métodos surgidos, aplicados al cálculo estructural de las cáscaras cilíndricas largas y fundamentados en la Teoría de la Elasticidad.*

*A partir de este momento, las cáscaras cilíndricas largas de cubierta se impusieron como tipologías estructurales capaces de cubrir grandes luces con un gasto mínimo de material. Sin embargo, el problema residía en la gran complejidad que entrañaba la*

resolución de los procesos matemáticos, basados en la aplicación de la Teoría de la Elasticidad y empleados para realizar su cálculo estructural.

A partir de 1940 se producirá una gran eclosión en el cálculo estructural de estas tipologías estructurales a consecuencia de las discrepancias existentes entre los resultados matemáticos obtenidos en base a la teoría de la elasticidad y los logrados, por medio de ensayos, sobre estructuras reales. En este contexto, los estudios realizados por los ingenieros daneses K. W. Johansen, en 1944, y H. Lundgren, en 1949, marcarán el origen de la aplicación del método denominado de la viga al cálculo estructural de las cáscaras cilíndricas largas de cubierta de hormigón armado. Con este método se logró calcular, de manera sencilla y segura, estas tipologías estructurales como se tratará de demostrar en la comunicación.

**Palabras clave:** Cáscara cilíndrica larga de cubierta de hormigón armado, cálculo estructural de cáscaras cilíndricas largas, cascarones de hormigón armado, método de la viga, K.W. Johansen.

## 1. INTRODUCCIÓN

Tras la Primera Guerra Mundial, las cáscaras cilíndricas largas de cubierta se impusieron como tipologías estructurales capaces de cubrir grandes luces, anteriormente ejecutadas por medio de estructuras de acero. Ahora, sin embargo, el nuevo material utilizado sería el hormigón armado.

Hasta los años 20, y concretamente en Alemania, el comportamiento estructural de estas nuevas tipologías de hormigón se estudió matemáticamente como si de “membranas” se trataran [1], [2]. Por ello, surgió la necesidad de elaborar un método matemático que fuera capaz de calcularlas, previamente a su construcción, con una base teórica adecuada y rigurosa. En este sentido, se recurrió a la aplicación de la Teoría Elástica debido a su más que aprobada vigencia en el cálculo estructural en ese momento (Fig. 1).

La formulación matemática de la teoría elástica, referida a materiales ideales, homogéneos e isotropos respondiendo

con ello a la ley de Hooke, aplicada al cálculo estructural de las cáscaras cilíndricas largas fue desarrollada en el decenio de 1930, en Alemania, por los ingenieros Fr. Dischinger [3], [4], [5] y U. Finsterwalder [6], [7], [8], y posteriormente ampliada por el noruego A. Aas Jakobsen [9], [10].



**Figura 1:** Cáscaras cilíndricas largas del Dywidaghalle. Fr. Dischinger y U. Finsterwalder. “Die Dywidag-Halle auf der Gesolei”. *Der Bauingenieur*, n° 7, figura 3, pp: 929, 1926

Mediante la resolución de complejas ecuaciones diferenciales de octavo orden, se lograron determinar los esfuerzos y momentos en todos los

puntos de la cáscara. Sin embargo, la aplicación de la teoría elástica de cáscaras resultó ser prácticamente inaplicable puesto que implicaba, no solo resolver ecuaciones de gran complejidad matemática sino, además, introducir una serie de hipótesis irreales. Estas hipótesis suponían, o bien idealizar una realidad de la estructura imposible de conocer a priori, o bien hacer referencia a un material ideal, homogéneo e isótropo, cuando el hormigón armado no cumple con tales propiedades. Por tanto, en ningún caso se podía asegurar que el estado tensional obtenido en la cáscara respondiera al “estado real” de la estructura, además de provocar la aparición de grandes incongruencias entre los resultados obtenidos por el cálculo y lo que posteriormente acontecía en la realidad [11]. Esto hizo que algunos estudiosos en la materia concluyeran que la teoría de la elasticidad no podía garantizar la certeza de sus resultados más que en la medida de la exactitud de las hipótesis que se hubieran establecido previamente [12], [13], [14], [15], [16], [17].

En la literatura existente, antes de la publicación del libro *Cylindrical Shell* de H. Lundgren en 1949 [14], no existían apenas escritos que trataran la problemática del análisis de cáscaras cilíndricas largas más allá de lo especificado por la teoría de la membrana o, sobre todo, por la teoría de la elasticidad. No obstante, existieron diferentes patrones ligados a conseguir una cierta simplificación de las herramientas analíticas, como las propuestas por los ingenieros U. Finsterwalder [7], A. Aas Jakobsen [9], H. Schorer [18] y R. Vallette [19].

Dentro de este contexto, en 1944 el ingeniero danés Knud Winstруп Johansen publicó un artículo, en danés, de gran relevancia en cuanto que analizó estructuralmente una cáscara cilíndrica larga real, como si de una viga de hormigón se tratara y basando el cálculo exclusivamente en el planteamiento de ecuaciones de equilibrio, permitiendo con ello un cálculo sencillo y seguro de estas tipologías [12]. Posteriormente, otros ingenieros como el húngaro G. Kazinczy [15] y el también danés H. Lundgren [14] continuaron desarrollando este método denominado método de la viga.

## 2. MÉTODO DE LA VIGA

### 2.1. Modelización de la cáscara

La cáscara cilíndrica calculada por K.W. Johansen, y que servirá como ejemplo de análisis del presente trabajo, representaba la cubierta de un restaurante construido en 1938 en la ciudad de Copenhagen (Fig. 2).



Fig. 1.

#### SKALKONSTRUKTION PAA RADIOHUSET BEREGNING OG FORSØG BERETNING FRA LABORATORIET FOR BYGNINGSSTATIK VED K.W. JOHANSEN

##### Indledning.

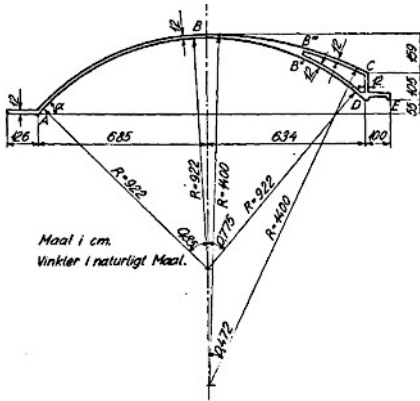
Skallen dækker over Restaurationsbygningen, der ligger oven paa Studieblokken i Radiohuset<sup>1)</sup>.

Restauranten er et Rum paa 24 m's Længde og 16 m's Bredde; dertil stoder Køkkenet, der har samme Bredde, men hvis Længde kun er 12 m; disse to Rum er overdækket med den i Fig. 1 viste Skalkonstruktion, der bæres af de to Gavle og Mellemvæggen samt langs den nordre Langvæg af en Række Søjler, hvis indbyrdes Afstand er 3,2 m. I den sydlige Langvæg er der ingen Understøtninger, men Skalkværsnittet er til Gengæld dobbelt, idet der skulde anbringes en langsgaaende Ventilationskanal.

Skallen, der er 12 cm tyk, har det i Fig. 2 viste Tværsnit, der består af en Cirkelbue ABD med Radius 9,22 m, som i Toppen B tangeres af Cirkelbuen BC med Radius 14,0 m. Ved det rettede lodrette Stykke CD lukkes Tværsnittet; desuden findes der i hver Side en vandret Fig.

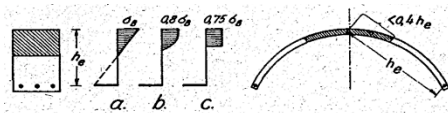
**Figura 2:** K.W. Johansen. “Skalkonstruktion paa Radiohuset. Beregning og forsøg”. *Bygningsstatiske Meddelelser*, n° 15, p: 1, 1944

La cáscara, de 12 cm de espesor, cubre una longitud de 36 m por 16 m de ancho (Fig. 3).



**Figura 3:** Geometría Transversal de la cáscara. K.W. Johansen. "Skalkonstruktion paa Radiohuset. Beregning og forsog". Bygningsstatistiske Meddelelser, n°15, pp: 3, 1944

La modelización consiste en asemejar su comportamiento al de una viga de hormigón armado (Fig. 4)

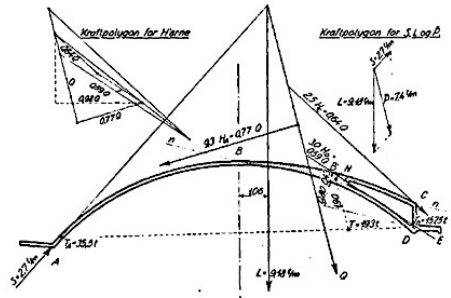


**Figura 4:** Esquema de semejanza entre viga de hormigón armado y cáscara cilíndrica larga. H. Lundgren H. Cylindrical Shells, Vol. I, The Danish Technical Press the Institution of Danish Civil Engineers, pp: 55, 1949

## 2.2. Análisis longitudinal de la cáscara cilíndrica larga

Considerando un valor para la carga permanente de 340 kg/m<sup>2</sup> y para la variable de 100 kg/m<sup>2</sup>, el valor de la

resultante sería  $L = 9,18 \text{ t/m}$ , actuando a una distancia de 1,06 m del punto B (Fig. 5). Las reacciones en los pilares serán de valor 2,70 t/m, para un ángulo  $\alpha = 48, 62^\circ$  y la componente vertical y horizontal:  $S_v = 2 \text{ t/m}$  y  $S_h = 1,8 \text{ t/m}$ .



**Figura 5:** Representación de fuerzas exteriores e interiores correspondientes al momento positivo. K.W. Johansen. "Skalkonstruktion paa Radiohuset. Beregning og forsog". Bygningsstatistiske Meddelelser, n°15, pp: 4, 1944

Combinando la componente horizontal, en un polígono de fuerzas (parte derecha superior de la figura 5), con la resultante de las fuerzas exteriores  $L$ , se obtiene la resultante oblicua de valor  $P = 7,40 \text{ t/m}$ .

Asimilando, por tanto, la geometría de la cáscara cilíndrica al de una viga, el momento flector total vendría dado por:

$$M_{emp} = \frac{3}{32} \cdot 7,40 \frac{t}{m} \cdot (24m)^2 = 400tm \quad (1)$$

La fibra neutra, en la sección transversal, debe situarse de tal forma que la resultante de las fuerzas tangenciales tenga igual magnitud y dirección opuesta a la resultante debida al cortante  $Q$ ; que por otra parte debe ser igual al valor obtenido para la resultante oblicua de las



cargas. Es decir, partiendo de una condición de equilibrio de fuerzas, se puede establecer la ubicación de la línea neutra obteniendo una solución al problema estructural, aunque no la única. Una vez situada la fibra neutra se puede determinar sin dificultad el área de refuerzo necesario, así como la tensión del hormigón y la tensión tangencial. El punto situado a mayor distancia de la fibra neutra es el punto denominado B' (Fig. 5), por lo que ese punto poseerá la máxima tensión a compresión. Por otro lado, se colocan barras de refuerzo en el contorno de la cáscara, situándolas en los centros de masas Ta y Td.

Una vez hecho esto, se procede a calcular el módulo, la dirección y el punto de aplicación de la resultante de las tensiones de compresión,  $N = 193 \text{ t}$ . El punto de aplicación se obtiene por la intersección de dos rectas (Fig. 5); una, la recta que une las resultantes de las tracciones, es decir la recta Ta-Tb; mientras que la segunda es una recta paralela a la dirección de Q, y que pasa por el punto B', es decir resultante de las compresiones.

La distancia entre los puntos B' y T determina el brazo de palanca entre el par de fuerzas, constituyendo una distancia de 1,9 m. Por lo que el valor del momento será de:

$$M = 193t \cdot 1,90m = 367tm \quad (2)$$

Por tanto, el esquema del análisis realizado en la cáscara cilíndrica larga ha sido:

- Cálculo del valor de las cargas exteriores.
- Cálculo de los momentos flectores, positivos y negativos.
- Obtención de la ubicación de la fibra

neutra en la sección transversal de la cáscara por equilibrio de fuerzas.

- Cálculo de la tensión máxima de compresión del hormigón.
- Obtención de los valores de las fuerzas normales, de tracción y compresión.
- Cálculo del refuerzo longitudinal en la cáscara.

### 2.3. Análisis Transversal

Al ser necesario obtener el valor de la resultante de las fuerzas tangenciales, se procede a aplicar la teoría del tirante [14, p. 263]; donde las fuerzas normales en la dirección de la cáscara  $N_x$  se sitúan concentradas en una única generatriz, que se denomina tirante, y aplicadas en el centro de masas de la zona en cuestión; mientras que las fuerzas tangenciales  $N_{xq}$ , de la sección transversal de la cáscara, se mantendrían constantes dentro de cada intervalo existente entre dos tirantes.

Se divide la sección transversal de la cáscara, objeto del análisis, en tres arcos diferentes AB', B'D y B'CD (Fig. 3); y se denominarán las fuerzas tangenciales:

$$H_A, H_C, H_D$$

siendo la resultante de cada una de ellas sería (Fig. 5):

$$9,3H_A; 2,5H_C; 3,0H_D$$

Al descomponer la fuerza transversal Q, o fuerza cortante (polígono de fuerzas situado en la parte superior izquierda de la figura 5), de acuerdo con esas tres resultantes se obtiene el valor:

$$H_A = \frac{0,77Q}{9,3} = 0,083Q \quad (3)$$

$$H_c = \frac{0,64Q}{2,5} = 0,256Q \quad (4)$$

$$H_D = \frac{0,59Q}{3,0} = 0,197Q \quad (5)$$

Dado que el brazo de palanca es de 1,90 m:

$$H = H_A + H_C + H_D = \frac{Q}{1,90m} \quad (6)$$

De igual manera, realizando cortes únicamente por Ta y Td, se obtiene:

$$H_A = \frac{Q}{1,90} \cdot \frac{T_A}{T} = 0,097Q \quad (7)$$

$$H_C = 0,243Q ; H_D = 0,187Q \quad (8)$$

De esta manera, se asegura la exacta ubicación de la fibra neutra.

Del mismo modo se actuaría para las secciones transversales de la cáscara correspondientes a la ubicación de momento negativo.

**Cálculo de los momentos transversales:**

Al seccionar un elemento de la cáscara, de longitud dx en la dirección de la generatriz de la cáscara y de anchura δs, ortogonal a la anterior, se observa como en él actúa la resultante de las tensiones tangenciales, H, debidas a la acción de las cargas exteriores. Como la resultante de las tensiones tangenciales H, es proporcional a la fuerza transversal, o cortante Q, las tensiones tangenciales t deberán ser igualmente proporcionales a las cargas exteriores, es decir:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \bar{P} = 7,4t/m \quad (9)$$

De acuerdo con los valores anteriormente calculados para las fuerzas tangenciales,

los valores de las tensiones tangenciales t serían, para el tramo AB:

$$t_A = 0,097 \cdot 7,4 = 0,72t/m^2 \quad (10)$$

Para el tramo B''C:

$$t_C = 0,243 \cdot 7,4 = 1,80t/m^2 \quad (11)$$

Para el tramo B'''D:

$$t_D = 0,187 \cdot 7,4 = 1,38t/m^2 \quad (12)$$

Como t no varía a lo largo de la longitud de la cáscara, los momentos tangenciales son constantes a lo largo de dicha longitud.

El momento transversal debido a la fuerza tangencial t (Fig. 6.6), vendría dado por la expresión:

$$m_t = \int_0^\varphi (r - r \cos(\varphi - \theta)) \cdot t \cdot r d\theta = \quad (13)$$

$$= \int_0^\varphi r^2 t [1 - \cos(\varphi - \theta)] d\theta = (\varphi - \sin\varphi) t r^2$$

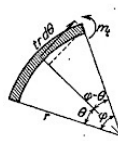


Fig. 6.

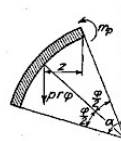


Fig. 7.

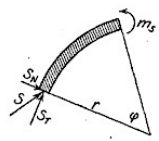


Fig. 8.

**Figura 6: Obtención de momentos tangenciales.** K.W. Johansen. "Critical notes on the calculation and design of cylindrical shell". Third Congress Lieja 1948, IVC, pp: 602, 1948

El momento debido a la carga exterior P (Fig. 6.7):

$$m_p = -pr\varphi z \quad (14)$$

Y, por último, el momento debido a la reacción en los soportes sería (Fig. 6.8):



$$m_s = S_r r (1 - \cos \varphi) - S_N r \sin \varphi \quad (15)$$

En definitiva, el momento resultante viene dado por la suma de los tres anteriores:

$$m_\varphi = m_t + m_p + m_s \quad (16)$$

Resumiendo, el análisis transversal de la cáscara se ha resuelto de manera sumamente sencilla a partir de la resolución del:

- Cálculo de las fuerzas transversales y su ubicación en la sección transversal de la cáscara.

- Cálculo de los momentos transversales debidos a los esfuerzos tangenciales, a la carga exterior y a las reacciones en los apoyos.

Con todos estos datos la obtención de la armadura necesaria en la cáscara es inmediata.

Por tanto, mediante una apropiada selección del momento y de la fuerza transversal, o cortante, en el tramo CD, se pueden llegar a obtener momentos resultantes en B' y B'' de igual magnitud, de igual manera a como se actuaría en una viga.

### 3. CONCLUSIONES

La aplicación de la teoría elástica de cáscaras, desarrollada en el decenio de 1930, resultó ser sumamente compleja y aun así surgieron graves incongruencias entre los resultados obtenidos mediante ensayos y los que resultaban del cálculo analítico.

En este sentido, el método de cálculo desarrollado por el ingeniero danés K. W. Johansen en 1944, supone asemejar el comportamiento de la cáscara cilíndrica larga de cubierta al de una viga hueca de hormigón armado con el fin de poder emplear un método de cálculo sencillo y

seguro, basado en el equilibrio de tensiones.

El método de la viga proporciona una solución de equilibrio que, si la cáscara está constituida con un material dúctil, y en ausencia de problemas de inestabilidad, resulta ser una solución segura; sin consideraciones acerca de las condiciones de contorno existentes que, por otra parte, resultan ser variables e imposibles de determinar a priori.

El estado de equilibrio en la cáscara cilíndrica larga se consigue por medio del traspaso de esfuerzos de las zonas más solicitadas a las que lo están menos. Todo ello dependiendo de la geometría transversal de la cáscara, la ubicación de la fibra neutra y las diferentes disposiciones que se elija para la armadura. Por tanto, el estado de equilibrio, así obtenido, es una solución al problema, pero no la única.

### REFERENCIAS

- [1] H. Reissner. "Über die Spannungsverteilung in zylindrischen Behälterwänden", *Beton und Eisen*, vol. 7, nº6, pp: 150-155, 1908.
- [2] F. E. Emperger. *Handbuch für Eisenbetonbau: Entwicklungsgeschichte und theorie des eisenbetons*. Wilhelm Ernst & Sohn, 1908
- [3] Fr. Dischinger. *Schalen und Rippenkuppeln. 4a ed.* Handbuch der Eisenbetonbau. VI Band, Zweiter. Verlag von Wilhelm, pp:163-383, Berlín, 1928



- [4] Fr. Dischinger. "The Zeiss-Dywidag system of construction for reinforced concrete shell roofs over large spans". *First International Congress for Concrete and Reinforced Concrete*, 1930, Liège
- [5] Fr. Dischinger. "Die strenge Theorie der Kreiszylinderschale in ihrer Anwendung auf die Zeiss-Dywidag-Schalen", *Beton u. Eisen*, n°34, pp: 257-264, 283-294, 1935
- [6] U. Finsterwalder. "Die Theorie der kreiszylindrischen Schalengewölbe System Zeiss-Dywidag und ihre anwendung auf die Grossmarkthalle in Budapest", *Journal of Bridge and Structural Engineering*. Primer Congreso IABSE, 1932, Paris
- [7] U. Finsterwalder. "Les voiles minces cylindriques raidis transversalement à section en forme de segment circulaire". *Ingenieur Archiv.*, n° IV, 1935
- [8] U. Finsterwalder. "Cylindrical shell structures". *Second Congress IABSE*, 1936, Berlin
- [9] A. Aas Jakobsen. "Sur le calcul de la voûte cylindrique circulaire". *Travaux*, n°60, pp: 529-535, 1937
- [10] A. Aas Jakobsen. "Über das Randstörungsproblem an Kreiszylinderschalen". *Der Bauingenieur*, n°29, pp: 394-405, 1939.
- [11] P. B. Morice. "Research on concrete shell structures". *Proceedings of a Symposium on Concrete Shell Roof Construction*, 1952
- [12] K. W. Johansen. "Skalkonstruktion paa Radiohuset". *Bygningsstatiske Meddelelser*, n°15, pp: 1-26, 1944
- [13] K. W. Johansen. "Critical notes on the calculation and design of cylindrical shells". *Third Congress IABSE*, 1948, Liège
- [14] H. Lundgren, H. *Cylindrical Shells*. Vol. I: Cylindrical Roofs. The Danish Technical Press the Institution of Danish Civil Engineers, 1949
- [15] G.v. Kazinczy. "Beräkning av cylindriska skal med hänsyn till den armerade betongens egenskaper". *Betong*, n°34, pp: 239-261, 1949
- [16] J. Heyman. "Westminster Hall roof". *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, n°37, pp: 137-262, 1967
- [17] J. Heyman. *Equilibrium of Shell Structures*. Oxford University Press, Oxford, 1977
- [18] H. Schorer. "Line Load Action on Thin Cylindrical Shells". *Proceedings American Society of Civil Engineers*, 62, pp: 413-414, 1936
- [19] R. Vallette. "Considérations sur les routes minces autoportantes et leur calcul", *Le Genie Civil*, n° 104, pp: 85-88, 1943